ACETATO 1

1. Um saco contém 100 balões, dos quais 40 encarnados, 25 azuis e os restantes verdes. Calcule a probabilidade de:

i. ao retirar do saco um balão, este não ser verde;

ii. ao retirar do saco cinco balões, sem reposição, somente dois serem encarnados;

iii. ao retirar do saco seis balões, com reposição, somente o 1º e o 3º serem azuis;

iv. ao retirar do saco seis balões distintos, os dois primeiros serem verdes, e existir mais um balão verde entre os restantes;

v. ao retirar do saco três balões, com reposição, pelo menos dois serem encarnados.

ACETATO 2

1. No final de cada ano lectivo, um aluno pode ter sido, ou não, aprovado a Matemática I e a Matemática II. Sabe-se que a probabilidade de um aluno ser aprovado a Matemática I é de 0.40, que a probabilidade de um aluno ser aprovado somente a Matemática II é de 0.30 e que a probabilidade de um aluno ser aprovado às duas matemáticas é de 0.25. Calcule:

i. a probabilidade de um aluno ser reprovado a Matemática I;

ii. a probabilidade de um aluno ser aprovado a Matemática II;

iii. a probabilidade de um aluno ser aprovado a pelo menos uma matemática;

iv. a probabilidade de um aluno ser aprovado somente a uma da matemáticas.

ACETATO 3

1. Um saco tem 5 berlindes azuis e 3 berlindes vermelhos. Qual a probabilidade de, ao extrair aleatoriamente e sem reposição 3 berlindes, somente o 2º ser vermelho?

2. Sejam A e B acontecimentos independentes definidos no mesmo espaço de resultados, sendo $P(A)=\frac{1}{3}$ e $P(B)=\frac{3}{4}$. Calcule:

i. $P(A|\overline{B})$;

ii. $P(A\cup B)$;

iii. $P(B|A\cup B)$.

3. Volte a resolver o exercício 1, considerando agora que os berlindes são extraídos com reposição.

ACETATO 4

1. Uma loja tem três vendedores (*A*, *B* e *C*), sendo 35% dos clientes atendidos por *A*, 20% por *B* e os restantes por *C*. Alguns atendimentos resultam em compras dos clientes, correspondendo a 20% dos atendimentos de *A*, 5% dos atendimentos de *B* e 15% dos atendimentos de *C*.

i. Qual a probabilidade de um cliente efectuar compras?

ii. Qual a probabilidade de um cliente ser atendido por *A*, sabendo que fez compras?

iii. Qual a probabilidade de um cliente ser atendido por *A* ou fazer compras, sabendo que nesse dia *B* esteve de férias?

ACETATO 5

1. Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade

X	-1	0	0.5	1
$f(x)$	0.3	0.4	0.2	0.1

i. Determine a função distribuição da variável aleatória X.

ii. Calcule:

$P(X = 0.5)$; $P(X < 1)$; $P(X > 0)$; $P(0 < X \leq 1)$;

$P(-1 \leq X < 0.5)$; $P(X = -1 \mid X < 0.5)$.

iii. Determine o valor esperado e a variância da variável aleatória X.

2. Considere o seguinte jogo: lança um dado ao ar. Se sair ímpar perde 100 euros e termina o jogo. Se sair par ganha já 50 euros e lança novamente o dado. No 2º lançamento, se sair um ou dois perde 50 euros, se sair 3 ou 4 não ganha nem perde mais nada, e se sair 5 ou 6 ganha mais 300 euros.

i. Construa a variável aleatória X que representa os ganhos possíveis com este jogo.

ii. Jogaria de boa vontade este jogo? Porquê?

ACETATO 6

1. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas com funções de probabilidade

X	0	1	2
$f(x)$	0.25	0.5	0.25

Y	0	1	2
$f(y)$	0.35	0.5	0.15

i. Sabendo que a soma dos valores que as variáveis X e Y assumem nunca é superior a dois e que as variáveis nunca são simultaneamente nulas, determine a função de probabilidade conjunta destas variáveis.

ii. Determine o coeficiente de correlação das variáveis aleatórias X e Y. Faça um breve comentário ao resultado obtido.

iii. Diga, justificando, se as variáveis aleatórias X e Y são independentes.

iv. Construa a função de probabilidade da variável aleatória $Z = X \times Y/2$.

v. Determine a esperança e a variância da variável aleatória $W = 3 - X + 5Y$.

ACETATO 7

1. A probabilidade de cada aluno de uma turma com 50 ser natural de Leiria é de 0.4.

i. Qual a probabilidade de, ao inquirir 10 alunos, 6 serem naturais de Leiria?

ii. Qual a probabilidade de ser necessário inquirir 10 alunos para obter 6 naturais de Leiria?

iii. Suponha que após inquirir os 50 alunos quanto ao seu local de nascimento, obteve 23 de Leiria. Qual a probabilidade de, ao seleccionar aleatoriamente 10 alunos sem reposição, 6 serem naturais de Leiria?

2. O número de clientes que chegam à sapataria *Tamanco* é dado por um processo de Poisson. A probabilidade de, numa hora, chegar um cliente é de 0.0149 e a probabilidade de chegarem dois clientes é de 0.0446.

i. Em média, quantos clientes chegam por hora à sapataria *Tamanco*?

Considere agora $\lambda = 6$.

ii. Calcule a probabilidade de não chegar qualquer cliente durante uma hora.

iii. Calcule a probabilidade de chegarem menos de dez clientes durante duas horas.

3. Seja $X \sim H(5000,50,200)$ uma variável aleatória. Calcule $P(X \leq 5)$.

ACETATO 8

1. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2}, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a função densidade da variável aleatória X. Calcule:

i. a função distribuição de X;

ii. a esperança e o desvio padrão de X;

iii. $P(X = 0)$ e $P(X < 0 \mid X > -0.5)$.

2. O comprimento de determinado tipo de parafusos é uniformemente distribuído entre os 10 e os 11 milímetros.

i. Qual a probabilidade de, ao seleccionar aleatoriamente um parafuso, este medir menos de 10.3 mm?

ii. Em média, quanto mede cada parafuso?

iii. Qual a probabilidade de, ao seleccionar aleatoriamente um lote de dez parafusos, somente dois medirem menos de 10.3 mm?

ACETATO 9

1. Considere a função $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$.

i. Determine a função distribuição da variável aleatória *X*.

ii. Calcule $P(-1\leq X\leq 1)$.

2. O número de passageiros que chegam a uma determinada estação de comboios é uma variável aleatória com distribuição Poisson de média dois por cada **dez segundos**.

i. Qual a probabilidade de em dez segundos chegar apenas um passageiro?

ii. Um passageiro acaba de chegar. Qual a probabilidade de demorar menos de quinze segundos até chegar o próximo passageiro?

3. Considere a variável aleatória $X\sim N(10,3)$. Calcule:

i. $P(X\leq 13)$; $P(X>11.53)$; $P(X<5)$; $P(3<X<12\,|\,X<13)$.

ii. o valor de *a* de modo a que $P(X\leq a)=0.6915$.

iii. o valor de *b* de modo a que $P(X\leq b)=0.0202$.

ACETATO 10

1. Considere as variáveis aleatórias independentes $X_1 \sim N(-2,2)$ e $X_2 \sim N(4,3)$. Calcule $P(Y > 5)$, com $Y = 2 + X_1 + 2X_2$.

2. Considere a variável aleatória $X \sim Bi(50,0.4)$. Calcule:

$$P(X = 20);\quad P(X \leq 19);\quad P(X \geq 25);\quad P(20 \leq X \leq 22).$$

3. Considere a variável aleatória $X \sim P(50)$. Calcule $P(X \leq 70)$.

4. Considere as variáveis aleatórias $Y_1,...,Y_{50}$ independentes e identicamente distribuídas a $Y \sim U(a,b)$. Calcule $P\left(\sum_{i=1}^{50} Y_i > 25(a+b)\right)$.

5. Considere as variáveis aleatórias independentes $X \sim \chi^2_{(15)}$ e $Y \sim \chi^2_{(10)}$. Determine:

i. $P(X \leq 10.307);\quad P(X + Y > 20);$

ii. o valor de *a* tal que $P(X \leq a) = 0.15;$

iii. o valor de *b* tal que $P(X > b) = 0.995;$

iv. o valor de *c* tal que $P(X + Y > c) = 0.48.$

ACETATO 11

1. Considere as variáveis aleatórias independentes $X_i \sim N(0,2)$, i=1,...,5. Calcule $P\left(\sum_{i=1}^{5} X_i^2 > 10\right)$.

2. Considere a variável aleatória $X \sim \chi^2_{(200)}$. Calcule $P(X \geq 250)$.

3. Considere a variável aleatória $X \sim t_{(10)}$ Determine:

i. $P(X \leq 1.0931)$ e $P(X \leq -0.5415)$;

ii. $P(-0.2602 \leq X \leq 4.1437)$;

iii. o valor de *a* tal que $P(X < a) = 0.95$;

iv. o valor de *b* tal que $P(X > b) = 0.92$;

v. o valor de *c* tal que $P(-c < X < c) = 0.95$.

4. Considere as variáveis aleatórias independentes $X \sim N(8,2)$ e $Y \sim \chi^2_{(10)}$. Calcule $P\left(X - \frac{\sqrt{Y}}{2} < 8\right)$.

ACETATO 12

1. Considere que a duração de certo tipo de lâmpadas (em dias) segue uma distribuição normal de média 1000 e desvio padrão 100. Qual a probabilidade de, ao recolher uma amostra aleatória de 10 lâmpadas, todas durarem menos de 1100 dias?

2. Seja $(X_1,...,X_n)$ uma a.a. de uma população X com esperança μ. Quais das seguintes expressões são estatísticas?

$$\overline{X};\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{2n};\quad \frac{p\overline{X}}{n-1};\quad mín\, X_i + \frac{\left(máxX_i - mín\, X_i\right)}{2}.$$

3. Suponha que pretende estimar a altura média (em cm) dos jogadores da NBA. Com base na amostra observada

$$\mathbf{x} = (192, 198, 220, 204, 183, 221, 214, 202, 212, 199)$$

e no exercício 2, indique estimativas para μ.

ACETATO 13

1. Sabe-se que cada embalagem de iogurtes "CurtaVida" tem um peso normalmente distribuído com média igual a 125 gramas e desvio padrão igual a 10 gramas.

i. Qual a probabilidade de, ao seleccionar aleatoriamente 10 embalagens de iogurtes "CurtaVida", o peso médio encontrado ser inferior a 120 gramas?

ii. Um cliente pretende encomendar um lote de embalagens de iogurtes "CurtaVida", de forma a garantir que o peso médio dessa encomenda é superior a 123 gramas, com uma probabilidade mínima de 0.9. Qual deverá ser a dimensão da encomenda?

2. Sabe-se que cada embalagem de iogurtes "CurtaVida" tem um peso normalmente distribuído com média igual a 125 gramas e desvio padrão igual a 10 gramas. Qual a probabilidade de, numa amostra aleatória de dimensão onze, o desvio padrão amostral corrigido estar entre as 7 e as 12 gramas?

3. Seja $(X_1,...,X_{21})$ uma amostra aleatória de uma população X com $E(X)=\beta-1$ e $\hat{\sigma}_{obs}=7.95$ (valor estimado numa amostragem anterior). Calcule $P(\overline{X}>2+\beta)$.

ACETATO 14

1. O consumo (em litros por 100km) de certo tipo de automóveis é modelado por uma variável aleatória normal com esperança desconhecida e desvio padrão igual a 0.8 litros. Suponha que foi observado o consumo de 12 dessas viaturas, tendo-se observado $\sum_{i=1}^{12} x_i = 88.8$ e $\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 664.16$.

i. Calcule o intervalo a 95 % de confiança para μ. Pode concluir que o consumo médio é inferior a 8 litros?

ii. Resolva novamente a alínea anterior, considerando agora que o desvio padrão é desconhecido.

iii. Se pretender diminuir a amplitude do intervalo obtido na alínea **1.i.** para 0.5, aumentando apenas a dimensão da amostra, qual deverá ser a dimensão desta?

2. Considere o peso (em kg) de 10 raparigas anorécticas.

Rapariga	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Peso	38.4	42.1	39.7	40.5	32.1	36.4	37.5	33.9	36.4	37.8

Calcule um intervalo a 98% de confiança para o desvio padrão populacional. Pode concluir que a variância populacional é inferior a 50 kg^2?

3. A amostra seguinte representa o peso, em miligramas (mg), de 10 maços de cigarros de determinada marca:

808 , 791 , 819 , 853 , 859 , 814 , 823 , 829 , 809 , 798.

Suponha agora que obteve como intervalo aproximado a $(1-\alpha)\times 100\%$ para a variância populacional [227.415 ; x]. Qual o valor de x?

ACETATO 15

1. O grau de acidez do azeite produzido por determinada marca é uma variável aleatória com distribuição normal. Recolheu-se uma amostra de dimensão 25 de garrafas desse azeite tendo-se verificado

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 32.5 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{25} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 6 .$$

i. Teste a hipótese de que o grau de acidez médio é superior a 1.1, ao nível de significância de 5%, sabendo que:

a. o desvio padrão populacional é igual a 0.5;

b. o desvio padrão populacional é desconhecido.

ii. Teste a hipótese de que o grau de acidez médio é diferente de 1.1, ao nível de significância de 5%, sabendo que:

a. o desvio padrão populacional é igual a 0.5;

b. o desvio padrão populacional é desconhecido.

iii. Nas situações **1.i.a.** e **1.ii.b.** calcule o *p-value* do teste.

ACETATO 16

1. Seja X uma população em que $X \sim N(\mu, \sigma)$.

i. Considere o teste H_0: $\sigma = 5$ vs H_a: $\sigma > 5$. Se n = 21 e $\alpha = 0.10$, calcule a probabilidade de cometer um erro do tipo II quando o verdadeiro valor de σ é 6.

ii. Supondo que recolheu a amostra $x = (14;12;7;19;32;14;3;28;24;7)$, qual a decisão a tomar para o teste dado em **1i.**? ($\alpha = 0.05$)

iii. Sem efectuar mais cálculos, pode afirmar que as conclusões obtidas em **1ii.** se mantêm para $\alpha = 0.10$ e para $\alpha = 0.01$?

ACETATO 17

1. Os lotes de certo tipo de maçãs são classificados como sendo de categoria *I*, se o peso médio das maçãs que compõem a amostra for de 150 gramas, e como sendo de categoria *II*, se o peso médio das maçãs que compõem a amostra for de 120 gramas. Assume-se que o peso médio por maçã segue uma distribuição normal com desvio padrão de 25 gramas, qualquer que seja a categoria das maçãs. Pretende-se testar

$$H_0 : \mu = 150 \quad \text{vs} \quad H_a : \mu = 120 .$$

i. Identifique os erros que se pode cometer ao rejeitar ou não H_0, enquadrando a sua resposta no contexto do problema em análise.

ii. Considere agora a seguinte regra de decisão: rejeitar H_0 se $\overline{X} < 130$, com base numa amostra de dimensão 10.

a. Calcule a probabilidade de cometer um erro do tipo *I* e a probabilidade de cometer um erro do tipo *II*.

b. Qual a decisão a tomar se na amostra recolhida o peso médio das maçãs for de 133 gramas? Qual o tipo de erro que pode ter cometido?

iii. Se considerar agora um nível de significância de 5%, a hipótese H_0 será rejeitada quando a média amostral for inferior a que valor? (n = 10)